ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΠΑ.Λ.

8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28.

Α2. **α.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 59.

β. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 59.

Α3. **α.** Λάθος (Λ)
β. Σωστό (Σ)
γ. Λάθος (Λ)
δ. Λάθος (Λ)
ε. Σωστό (Σ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$.

Έτσι από τον τύπο $\frac{s}{\bar{x}} = CV$ έχουμε $\frac{2}{\bar{x}} = 0,2 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{2}{0,2} \Leftrightarrow \bar{x} = 10$

Β2. Είναι

$$\frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} = \bar{x} \Leftrightarrow \frac{52+\kappa}{6} = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 52+\kappa = 60 \Leftrightarrow \kappa = 8$$

Β3. Με $\kappa = 8$ οι τιμές του δείγματος σε αύξουσα σειρά είναι: 7, 8, 10, 11, 11, 13. Επειδή το πλήθος του δείγματος είναι 6 (άρτιος) η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή $\delta = \frac{10+11}{2} = 10,5$.

Εύρος**:** $R = 13 - 7 = 6$.

Β4. Εάν από κάθε τιμή του δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2 οι τιμές γίνονται: 5, 6, 8, 9, 9, 11. Τότε η νέα μέση τιμή $\bar{x}_1 = \frac{5+6+8+9+9+11}{6} = \frac{48}{6} = 8$.

Ενώ η νέα τιμή για την τυπική απόκλιση:

$$S_1=\sqrt{\frac{(5-8)^2+(6-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(9-8)^2+(11-8)^2}{6}}=$$

$$=\sqrt{\frac{9+4+1+1+9}{6}}=\sqrt{\frac{24}{6}}=\sqrt{4}=2.$$

Τότε ο νέος συντελεστής μεταβλητότητας γίνεται:

$$CV_1=\frac{S_1}{\overline{x}_1}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0,25>0,1\,.$$

Από το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

<u>Β τρόπος:</u>

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου οι νέες τιμές για τη μέση τιμή $\overline{x}_1$ και τυπική απόκλιση S_1 θα είναι

$\overline{x}_1=\overline{x}-2=8$

$S_1=S=2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρίζα πολυωνυμικής με:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-2x+10}\right)'=\frac{\left(x^2-2x+10\right)'}{2\sqrt{x^2-2x+10}}=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$$

Γ2. Επειδή $\sqrt{x^2-2x+10}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημο και οι ρίζες της $f'(x)$ δίνονται από το πρόσημο και τις ρίζες του αριθμητή $x-1$.

Έτσι

$f'(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow x-1<0\Leftrightarrow x<1$

Δηλαδή έχουμε τον πίνακα μεταβλητών:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Προκύπτει έτσι ότι:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f έχει ελάχιστη τιμή $f(1)=\sqrt{1^2-2\cdot 1+10}=\sqrt{9}=3$.

για $x=1$. Άρα $f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow f(x)\ge 3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(5, f(5))$ έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x+\beta$, όπου $\lambda=f'(5)=\dfrac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot 5+10}}=\dfrac{4}{\sqrt{25}}=\dfrac{4}{5}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) έτσι γίνεται $y=\dfrac{4}{5}x+\beta$.

Όμως η (ε) διέρχεται και από το σημείο $\mathrm{M}(5, f(5))$

άρα $f(5)=\dfrac{4}{5}\cdot 5+\beta\Leftrightarrow 5=4+\beta\Leftrightarrow \beta=1$.

Άρα η (ε) έχει εξίσωση $y=\dfrac{4}{5}x+1$.

Γ4. Στην (ε) θέτουμε $x=0$ οπότε $y=1$. Έτσι παίρνουμε το σημείο $B(0, 1)$ στο οποίο η (ε) τέμνει τον $y'y$.

Αν τώρα θέσουμε $y=0$, παίρνουμε $\dfrac{4}{5}x+1=0\Leftrightarrow 4x+5=0\Leftrightarrow 4x=-5\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{4}$.

Έτσι βρίσκουμε το σημείο $A\left(-\dfrac{5}{4},0\right)$ στο οποίο η (ε) τέμνει τον $x'x$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με:

$f'(x)=\left(x^3-3x^2+\lambda x\right)'=3x^2-6x+\lambda,\ x\in\mathbb{R}$.

Για $\lambda=3$ είναι $f'(x)=3x^2-6x+3=3\left(x^2-2x+1\right)=3(x-1)^2$.

Προκύπτει ότι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, όμως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+	0	+	
f			$\nearrow$		

Είναι $\dfrac{3}{8}=\dfrac{2}{24}$ και $\dfrac{5}{6}=\dfrac{20}{24}$, οπότε $\dfrac{3}{8}<\dfrac{5}{6}$ και επειδή f είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει $f\left(\dfrac{3}{8}\right)<f\left(\dfrac{5}{6}\right)$.

Δ2. Για $\lambda = 3$, είναι:

$$\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)} = \frac{3x^2-6x+3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-x\right)} = \frac{3\left(x^2-2x+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)x\left(x-1\right)} = \frac{3\left(x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)x\left(x-1\right)} =$$

$$= \frac{3\left(x-1\right)}{x\left(\sqrt{x}-1\right)} = \frac{3\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{3\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x\left(x-1\right)} = \frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{x}$$

Έτσι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{x} = \frac{3\left(\sqrt{1}+1\right)}{1} = 6$$

Δ3. Για $\lambda = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ και $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(x^2-2x+1\right) = 3\left(x-1\right)^2$.
Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης σε ένα σημείο με τετμημένη x_0 ισούται με $\lambda = f'(x_0) = 3\left(x_0-1\right)^2$. Όμως $3\left(x_0-1\right)^2 \geq 0$ με ελάχιστη τιμή την τιμή $\lambda = 0$ για $x_0 = 1$.
Δηλαδή στο το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το $A\left(1, f(1)\right)$ δηλαδή το $A\left(1,1\right)$.

Δ4. Για $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda,\ x \in \mathbb{R}$.
Δηλαδή η f' είναι τριώνυμο του οποίου οι ρίζες και το πρόσημο εξαρτώνται από την διακρίνουσα $\Delta = \left(-6\right)^2 - 4\cdot 3\cdot \lambda = 36 - 12\lambda$.

α. Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 36-12\lambda > 0 \Leftrightarrow -12\lambda > -36 \Leftrightarrow \lambda < 3$
τότε η f' έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗	max	↘	min	↗	

β. $\Delta = 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Τότε η f' έχει μία ρίζα διπλή και όπως απαντήθηκε στο ερώτημα Δ1, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

γ. Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 3$: Τότε η f' δεν έχει ρίζες και προκύπτει ο επόμενος πίνακας:

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		+	
f		↗	

Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.
Από α, β, γ προκύπτει ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα για $\lambda \geq 3$. Δηλαδή η μικρότερη τιμή για την οποία δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι $\lambda = 3$.